Національний університет цивільного захисту України

Черкаський інститут пожежної безпеки
ім. Героїв Чорнобиля

Григоренко К.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
та завдання до виконання контрольної роботи № 2
слухачами
факультету заочного навчання

Черкаси
2020

Загальні методичні вказівки

Індивідуальні завдання потрібно виконувати на листах А4, набраними у Microsoft Word, шрифт Times New Roman, кегль 14. Виконувати роботу потрібно за варіантом. Робота, виконана не за своїм варіантом, не перевіряється, не зараховується і повертається слухачеві.

Обкладинка роботи оформлюється згідно встановлених правил.

Умови усіх задач повинні записуватись повністю, графіки виконуватись охайно.

Розв’язування усіх прикладів і задач повинні супроводжуватись формулами, які використовуються, а також короткими поясненнями.

Якщо робота не зараховується, слухач виправляє її і представляє ще раз.

Контрольна робота містить 10 варіантів. Номер варіанту визначається за останньою цифрою шифру, яка відповідає другій цифрі задачі. Наприклад, у слухача шифр 075. Остання цифра – 5, отже, номери задач слухача: 5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75.

<u>1. Диференціальні рівняння</u>

<u>**Звичайним диференціальним рівнянням**</u> називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, функцію та її похідні. Порядок диференціального рівняння визначає найвища похідна, яка входить у рівняння. Розв'язком диференціального рівняння є всяка функція $y = f(x)$, яка при підстановці її у рівняння перетворює його у тотожність.

<u>**Диференціальне рівняння першого порядку**</u> має вид $F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$. Загальним розв'язком цього рівняння є функція виду $y = \varphi(x, C)$, яка при довільних значеннях сталої величини C є розв'язком цього рівняння. Геометрично функція $y = \varphi(x, C)$ описує множину інтегральних кривих. Для знаходження частинного (єдиного) розв'язку необхідно знати початкові умови, які для рівняння першого порядку записують у вигляді $y(x_0) = y_0$ або $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Не існує єдиного універсального методу, за допомогою якого можна розв'язати диференціальні рівняння першого порядку. Існує певний клас рівнянь, які можна розв'язати (проінтегрувати). Розглянемо такі рівняння.

Диференціальні рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називаються <u>**рівняннями з відокремлюваними змінними**</u>, якщо їх можна звести до виду

$$y' = f_1(x) f_2(y). \tag{1}$$

Якщо записати $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то одержимо $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$, або $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Тут змінні відокремились. Можемо проінтегрувати отриманий вираз. Одержимо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C,\ C = C_2 - C_1. \tag{2}$$

Вираз (38) називають загальним інтегралом диференціального рівняння (1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' + y = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної y'. Одержимо

$$y' = -\frac{y}{x};\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\Bigg|\cdot dx;\ dy = -\frac{y}{x}dx;\ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремились і можемо проінтегрувати вираз. Одержимо

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\ln|x| + C_2 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = C_3,\ C_3 = C_2 - C_1.$$

Сталу величину C_3 запишемо у вигляді $C_3 = \ln C$, тоді

$$\ln|y| + \ln|x| = \ln C \Rightarrow xy = \pm C,\ \pm C = C_4,\ xy = C_4 \Rightarrow y = \frac{C_4}{x}.$$

Однорідними рівняннями першого порядку називають рівняння виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3}$$

Для того, щоб рівняння (39) звести до рівняння з відокремлюваними змінними, вводять заміну змінної $y = xt$. Тоді $y' = t + xt'$ і рівняння (3) можна переписати через змінну t. Одержуємо

$$t + xt' = \varphi(t),\ xt' = \varphi(t) - t,\ t' = \frac{\varphi(t) - t}{x}.$$

Змінні відокремлюються і його вже можна розв'язати.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння відносно похідної y'; одержимо однорідне рівняння

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Введемо заміну змінної $y = xt,\ y' = t + xt'$. Одержимо

$$t + xt' = \frac{x^2 + x^2t^2}{2x \cdot xt} = \frac{x^2\left(1+t^2\right)}{2x^2t} = \frac{1+t^2}{2t}.$$

Або

$$xt' = \frac{1+t^2}{2t} - t = \frac{1+t^2-2t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}; \quad t' = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x};$$

якщо позначимо $t' = \dfrac{dt}{dx}$, то одержимо вираз, який можна інтегрувати. Маємо

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} \Big| \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{1}{x} dx \Big| : \frac{1-t^2}{2t} \Rightarrow \frac{2t\,dt}{1-t^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2t\,dt}{1-t^2} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \Rightarrow -\ln\left|1-t^2\right| = \ln|x| + C_1;\ C_1 = \ln C,\ \ln|x| + \ln\left|1-t^2\right| = \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(1-t^2\right) = C.$$

Повернемося до старої змінної, тобто підставимо замість t його значення $t = \dfrac{y}{x}$. Одержуємо загальний розв'язок у вигляді

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C \Rightarrow x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2} = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx.$$

Лінійними рівняннями першого порядку називають рівняння виду

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{4}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані функції.

Одним із способів розв'язування лінійних рівнянь є метод знаходження розв'язку рівняння (4) у вигляді добутку двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто $y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v;\ y' = u'v + v'u$.

Тоді рівняння (4) можна переписати у вигляді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x),\ u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x). \tag{5}$$

На функцію $v = v(x)$ накладають таку умову, щоб вираз

$$v' + P(x)v = 0. \tag{6}$$

Замість рівняння (5) одержуємо рівняння

$$u'v = Q(x). \qquad (7)$$

Рівняння (6) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'язавши його, одержуємо функцію $v = v(x)$. Підставимо цю функцію у рівняння (7) і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними, для якого зможемо знайти загальний розв'язок у вигляді $u = u(x, C)$.

Тоді загальний розв'язок лінійного рівняння (4) запишемо у вигляді

$$y = v(x) \cdot u(x, C).$$

<u>Зауваження</u>. Тим самим методом можна розв'язувати рівняння виду

$$y' + yP(x) = Q(x) y^{\alpha},$$

де α – довільне число і яке називають рівнянням Бернуллі.

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

<u>Розв'язання</u>. Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $y = u \cdot v,\ y' = u'v + v'u$. Після підстановки цієї заміни у рівняння одержимо таке рівняння:

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x} = x^2,\ u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Прирівняємо до нуля вираз у круглій дужці $v' - \dfrac{v}{x} = 0$. Залишилося рівняння виду $u'v = x^2$. Знайдемо розв'язок рівняння $v' = \dfrac{v}{x}$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x};\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};\ \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x};\ \ln|v| = \ln|x|,\ v = x.$$

Підставимо одержане значення v у рівняння $u'v = x^2$. Одержимо

$$u'x = x^2,\ u' = x,\ \frac{du}{dx} = x,\ du = x\,dx,\ \int du = \int x\,dx + C,\ u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Загальний розв’язок шуканого рівняння має вигляд $y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) x$, $y = x\left(\frac{x^2}{2} + C \right)$.

<u>Диференціальне рівняння другого порядку</u> має вид $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ або $y'' = f\left(x, y, y'\right)$, а початкові умови записують у вигляді $y\left(x_0\right) = y_0$, $y'\left(x_0\right) = y_0'$.

<u>Лінійне рівняння другого порядку</u> має вид

$$a_0\left(x\right) y'' + a_1\left(x\right) y' + a_2\left(x\right) y = b\left(x\right), \tag{8}$$

де $a_0\left(x\right), a_1\left(x\right), a_2\left(x\right), b\left(x\right)$ – деякі неперервні функції, а $a_0\left(x\right) \neq 0$. Якщо $b\left(x\right) = 0$, то лінійне рівняння

$$a_0\left(x\right) y'' + a_1\left(x\right) y' + a_2\left(x\right) y = 0, \tag{9}$$

називають **<u>лінійним однорідним</u>**.

<u>Структура загального розв’язку</u> для рівняння (9) має вигляд

$$y = C_1 y_1\left(x\right) + C_2 y_2\left(x\right), \tag{10}$$

де C_1, C_2 – сталі величини, а $y_1 = y_1\left(x\right)$ та $y_2 = y_2\left(x\right)$ – функції, які складають фундаментальну систему розв’язків для цього рівняння.

<u>Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння</u> (8) дорівнює сумі загального розв’язку однорідного рівняння та частинного розв’язку $\tilde{y}\left(x\right)$ неоднорідного рівняння і записується у вигляді

$$y = C_1 y_1\left(x\right) + C_2 y_2\left(x\right) + \tilde{y}\left(x\right). \tag{11}$$

Лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вид

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{12}$$

де p, q – сталі величини.

Якщо розв’язок рівняння (12) шукати у вигляді функції $y = e^{kx}$, то характеристичне рівняння для цього рівняння має вид

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{13}$$

Якщо корені характеристичного рівняння (13):

1) дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок рівняння (12) записують у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \tag{14}$$

2) дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок рівняння (12) записують у вигляді

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right); \tag{15}$$

3) комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (i – уявна одиниця), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \tag{16}$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами виду

$$y'' + py' + qy = f\left(x\right), \tag{17}$$

де $f\left(x\right)$ – неперервна функція, можна знайти методом варіації сталої, або іншими частинними методами.

<u>Приклад 4</u>. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, який задовольняє умовам $y\left(0\right) = 1,\ y'\left(0\right) = 3$.

<u>Розв'язання</u>. Складемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння за формулою (13). Одержуємо

$$k^2 + k - 2 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -2.$$

Корені дійсні різні. Тепер за формулою (14) запишемо загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

Для знаходження констант C_1 та C_2 підставимо початкові умови в загальний розв'язок та його похідну y': $y' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$. Одержимо

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \quad 3 = C_1 e^0 - 2C_2 e^0,$$

або таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow 3C_2 = -2,\ C_2 = -\frac{2}{3},\ C_1 = 1 - C_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

<u>Відповідь</u>. Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = -\frac{2}{3}e^{x} + \frac{5}{3}e^{-2x}$.

<u>Приклад 5</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$.

<u>Розв'язання</u>. Характеристичне рівняння для даного рівняння має вигляд

$$k^2 + 2k + 10 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння будуть уявними (комплексно спряженими):

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = -1 \pm 3i,\ k_{1,2} = -1 \pm 3i,$$

де $\sqrt{-1} = i$. Згідно формули (16) загальний розв'язок рівняння, враховуючи, що $\alpha = -1,\ \beta = 3$, має вигляд

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

<u>Приклад 6</u>. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$, який задовольняє умовам $y(0) = -2,\ y'(0) = 1$.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 6k + 9 = 0,\ (k-3)^2 = 0,\ k_{1,2} = 3.$$

Корені дійсні рівні $k_1 = k_2 = 3$. Тому згідно формули (15) загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

Враховуючи початкові умови, обчислимо сталі величини C_1 та C_2. Так

$$y' = 3e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right) + e^{3x} \cdot C_2.$$

Тоді

$$\begin{cases} -2 = e^0\left(C_1 + 0\right), \\ 1 = 3e^0\left(C_1 + 0\right) + C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2, \quad C_2 = 7, \\ 3C_1 + C_2 = 1, \quad C_1 = -2. \end{cases}$$

<u>Відповідь</u>. Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = e^{3x}\left(7x - 2\right)$.

Наведемо тепер метод невизначених коефіцієнтів для знаходження розв'язку лінійного неоднорідного рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду.

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = f\left(x\right).$$

I. Якщо $f\left(x\right) = P_n\left(x\right)$, тобто многочлен n-го степеня, то тоді частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}\left(x\right) = Q_n\left(x\right) \cdot x^r, \tag{18}$$

де $Q_n\left(x\right)$ – многочлен n-го степеня; $r = 0$, якщо серед коренів характеристичного рівняння немає числа 0, $r = 1$, якщо $k = 0$ є одним з коренів характеристичного рівняння.

II. Якщо $f\left(x\right) = e^{\alpha x} \cdot P_n\left(x\right)$, тоді частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}\left(x\right) = e^{\alpha x} \cdot Q_n\left(x\right) \cdot x^r, \tag{19}$$

де $Q_n\left(x\right)$ – многочлен n-го степеня; $r = 0$, якщо жоден корінь характеристичного рівняння не співпадає з α, $r = 1$, якщо один корінь характеристичного рівняння співпадає з α, $r = 2$, якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють α.

III. Якщо $f\left(x\right) = e^{\alpha x} \cdot \left(M\cos\beta x + N\sin\beta x\right)$, тоді частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}\left(x\right) = e^{\alpha x} \cdot \left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \cdot x^r, \tag{20}$$

де $r=0$, якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, $r=1$, якщо $\alpha \pm i\beta$ – це корені характеристичного рівняння.

Застосування методу покажемо на прикладі.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'+y=x^2+1$, який задовольняє початковим умовам $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Розв'язання. Відповідне однорідне рівняння має вигляд $y''-2y'+y=0$, його характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$, корінь $k=1$ – кратний, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^x\cdot x=e^x\left(C_1+C_2x\right).$$

Оскільки $f(x)=x^2+1$, тобто многочлен другого степеня, то згідно (18) шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$\tilde{y}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x^0=Ax^2+Bx+C.$$

Тут $r=0$, тому що 0 не є коренем характеристичного рівняння.

Продиференціюємо $\tilde{y}$ двічі та підставимо отримані вирази в диференціальне рівняння:

$$\tilde{y}'=2Ax+B,\quad \tilde{y}''=2A.$$

Отримаємо тотожність

$$2A-2\left(2Ax+B\right)+Ax^2+Bx+C=x^2+1.$$

Зведемо подібні члени:

$$Ax^2+\left(B-4A\right)x+\left(C+2A-2B\right)=x^2+1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x; тоді маємо:

$$\begin{cases} A=1, \\ B-4A=0, \\ C+2A-2B=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ B=4, \\ C=7. \end{array}$$

Таким чином, $\tilde{y}=x^2+4x+7$.

Згідно (11), загальний розв'язок має вигляд

$$y=\bar{y}+\tilde{y}=e^{x}\left(C_1+C_2x\right)+x^2+4x+7.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам. Для цього підставимо в загальний розв'язок $x=0,\ y=1$; отримаємо

$$1=e^{0}\left(C_1+C_2\cdot 0\right)+7=C_1+7,$$

отже $C_1=-6$. Продиференціюємо тепер y:

$$y'=e^{x}\left(C_1+C_2x\right)+e^{x}\cdot C_2+2x+4$$

і підставимо початкові умови $x=0;\ y'=0$:

$$0=e^{0}\left(C_1+0\right)+e^{0}\cdot C_2+4,$$

отже $0=-6+C_2+4$, звідки $C_2=2$. Остаточно маємо відповідь: частинний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=e^{x}\left(-6+2x\right)+x^2+4x+7.$$

<u>Приклад 8</u>. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-3y'+2y=4\sin 2x$, який задовольняє початковим умовам: $y(0)=-1,\ y'(0)=1.$

<u>Розв'язання</u>. Відповідне однорідне рівняння

$$y''-3y'+2y=0,$$

його характеристичне рівняння $k^2-3k+2=0$, корені якого $k_1=2,\ k_2=1$, отже загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{x}.$$

Тепер, оскільки $f(x)=4\sin 2x$, то згідно (56) маємо $\alpha=0,\ \beta=2$; частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}=\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)\cdot x^{0}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Тут $r=0$, оскільки $\pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тепер диференціюємо $\tilde{y}$ двічі:

$$\tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$
$$\tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

Підставимо отримані вирази в рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 3\left(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x\right) + 2A\cos 2x + 2B\sin 2x = 4\sin 2x\,.$$

Зведемо подібні члени і прирівняємо коефіцієнти при відповідних членах:

$$\cos 2x\left(-4A - 6B + 2A\right) + \sin 2x\left(-4B + 6A + 2B\right) = 4\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6B - 2A = 0, \\ -2B + 6A = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B, \\ -2B - 18B = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{5} = 0,6 \\ B = -\frac{1}{5} = -0,2 \end{cases}$$

Отже, частинний розв’язок неоднорідного рівняння є

$$\tilde{y} = 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x.$$

Тоді загальний розв’язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y = \overline{y} + \tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x\,.$$

Знайдемо тепер частинний розв’язок, що задовольняє початковим умовам. Підставимо $x = 0,\ y = -1$ в розв’язок:

$$-1 = C_1 + C_2 + 0,6\,.$$

Продиференціюємо y та підставимо в отриманий вираз $x = 0,\ y' = 1$:

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - 1,2\sin 2x - 0,4\cos 2x,$$
$$1 = 2C_1 + C_2 - 0,4.$$

Отже, для знаходження C_1 і C_2 маємо систему

$$\begin{cases} -1,6 = C_1 + C_2, \\ 1,4 = 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння системи перше:

$$1,4 + 1,6 = 2C_1 - C_1 + C_2 - C_2 \ \Rightarrow\ 3 = C_1,$$

отже, з першого рівняння тоді

$$C_2 = -1,6 - C_1 = -4,6\,.$$

Запишемо остаточну відповідь: частинний розв’язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = 3e^{2x} - 4,6 \cdot e^{x} + 0,6\cos 2x - 0,2\sin 2x\,.$$

Відповідь: $I = 2$.

<u>Ряди</u>

<u>Числові ряди</u>

<u>Числовим рядом</u> називають послідовність чисел $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, з’єднаних між собою знаками плюс (або мінус), тобто

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \tag{1}$$

Числа u_i $\left(i = 1, 2, ...\right)$ називаються членами ряду, а u_n – загальним членом ряду.

<u>Частинною сумою ряду</u> називають суму S_n перших n членів ряду.

<u>Збіжним</u> називають числовий ряд, для якого виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S , \tag{2}$$

а границю S називають сумою ряду. Якщо умова (2) для ряду (1) не виконується, то такий ряд називають **<u>розбіжним</u>**.

<u>Необхідною умовою збіжності</u> ряду (1) є умова

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 . \tag{3}$$

Якщо умова (3) не виконується, то такий ряд є розбіжним. Часто необхідна умова (3) виконується, але не виконується при цьому умова (2) і тоді ряд є розбіжним.

При перевірці виконання умови (2) виникають значні труднощі при обчисленні послідовності частинних сум S_n. Існують достатні ознаки збіжності ряду (1), за допомогою яких значно простіше дослідити збіжність ряду.

Для **<u>знакододатних числових рядів</u>** зупинимось на таких ознаках збіжності:

1) **<u>Ознака Даламбера</u>**. Якщо для знакододатного ряду (1) існує границя відношення наступного члена до попереднього при необмеженому зростанні номера n, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho, \tag{4}$$

то при $\rho<1$ ряд збіжний, а при $\rho>1$ ряд розбіжний. При $\rho=1$ необхідно застосувати іншу ознаку.

2) **Радикальна ознака Коші**. Якщо для знакододатного ряду (1) існує границя виду

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho, \tag{5}$$

то при $\rho<1$ ряд збіжний, а при $\rho>1$ ряд розбіжний. При $\rho=1$ необхідно застосувати іншу ознаку.

3) **Ознака порівняння рядів**. Якщо один з двох знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збіжний (розбіжний) і виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,\ \left(k\neq 0,\ k\neq\infty\right),$$

то збіжним (розбіжним) є і другий ряд.

Приклад 1. Дослідити збіжність рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+5)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15n-1}{6n+3}\right)^n$.

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Даламбера. Для цього запишемо

$$u_n=\frac{3^n}{(n+5)!},\quad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\left((n+1)+5\right)!}=\frac{3^{n+1}}{(n+6)!},$$

і знайдемо границю за формулою (4). Одержимо

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+6)!}:\frac{3^n}{(n+5)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3(n+5)!}{(n+6)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3(n+5)!}{(n+5)!\cdot(n+6)\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+6}=0,\quad \rho=0<1.$$

Ряд збіжний.

б) Застосуємо радикальну ознаку Коші. Обчислимо границю виду (5). Одержимо:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{15n-1}{6n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{15n-1}{6n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{15-\frac{1}{n}}{6+\frac{3}{n}} = \frac{15}{6}, \ \rho = \frac{15}{6} > 1.$$

Ряд розбіжний.

Для **<u>знакозмінних рядів</u>** достатньою є така ознака збіжності. Якщо для знакозмінного ряду $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ є збіжним ряд, який складений з абсолютних величин членів цього ряду $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$, то знакозмінний ряд збіжний і таку його збіжність називають абсолютною.

Серед знакозмінних рядів окремо вирізняють знакочергові ряди виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \ . \tag{6}$$

<u>Ознака Лейбніца</u>. Якщо для ряду (6) абсолютні величини членів ряду спадні: $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ і виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збіжний, а його сума не більша першого члена ряду.

<u>Зауваження</u>. Якщо ряд із абсолютних величин членів ряду (6) є розбіжним, а умова Лейбніца виконується, то такий ряд називають умовно збіжним.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$.

<u>Розв'язання</u>. Перевіримо умови ознаки Лейбніца:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{1\cdot 2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{2\cdot 3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3\cdot 4}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot(n+1)}} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot(n+1)}} = 0$.

Умови виконуються. Ряд збіжний.

Функціональні ряди

Функціональними рядами називаються ряди, членами яких є деякі функції

$u_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$, визначені в області зміни аргументу x:

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \quad (7)$$

Функціональний ряд називається збіжним в точці x_0, якщо при підстановці $x=x_0$ в функціональний ряд (7) одержимо числовий збіжний ряд, а точку x_0 називають точкою збіжності функціонального ряду. Сукупність всіх точок збіжності функціонального ряду називають областю його збіжності.

Частинним випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом називають ряд виду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-a)^n, \quad (8)$$

де a і коефіцієнти $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ є сталі величини. Радіус збіжності степеневого ряду (8) обчислюється за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \quad (9)$$

Областю збіжності степеневого ряду (8) є інтервал $(a-R,a+R)$, до якого можуть бути додані кінцеві точки $a-R$ і $a+R$.

Приклад 3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5}x^n$.

Розв'язання. За формулою (9) знайдемо радіус збіжності ряду.

$$a_n = \frac{n+3}{n+5},\ a_{n+1} = \frac{n+4}{n+6},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5} : \frac{n+4}{n+6}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+6)}{(n+5)(n+4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{6}{n}\right)}{\left(1+\frac{5}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 1,\ R = 1.$$

Одержали інтервал $(-1;1)$. Дослідимо ще збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

1) При $x = 1$ одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5},$$

де $u_n = \dfrac{n+3}{n+5}$. Перевіримо необхідну умову (59) збіжності числового ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = 1 \neq 0.$$

Необхідна умова не виконується. Ряд розбіжний.

2) При $x = -1$ одержимо знакочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+3}{n+5}$, який також розбіжний, бо для нього не виконується необхідна умова збіжності ($\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$) ознаки Лейбніца.

Тобто до інтервалу збіжності ряду не можна додати жодної кінцевої точки.

<u>Відповідь</u>. Областю збіжності степеневого ряду є інтервал $(-1;1)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \tag{10}$$

то такий ряд називають рядом Тейлора, а вираз (10) називають розвиненням функції у степеневий ряд. Якщо у виразі (10) $a=0$, то такий ряд має вигляд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (11)$$

і називається рядом Маклорена для функції $f(x)$.

Розлянемо приклади розвинення у степеневі ряди деяких елементарних функцій.

Розвинути у степеневий ряд функцію $f(x)=e^x$. Знайдемо похідні даної

функції:

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ f'''(x)=e^x,\ldots,f^{(n)}(x)=e^x,\ldots$$

При $a=0$ одержимо

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1.$$

Одержані значення підставимо у ряд Маклорена (11). Одержимо розвинення функції у степеневий ряд

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ . \qquad (12)$$

Аналогічно можна знайти розвинення інших функцій у степеневі ряди. Так

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots,$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (13)$$

Ряд (13) називають біноміальним рядом. Цей ряд збігається при $x\in(-1;1)$.

Степеневі ряди мають широке застосування в точних та наближених обчисленнях функцій, інтегралів, наближеному розв'язуванні диференціальних рівнянь та інших випадках.

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $f\left(x\right)=e^{-x^2}$ і знайти його радіус збіжності.

Розв'язання. Позначимо $-x^2=t$ і для функції e^t в силу формули (12) запишемо ряд

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots\ . \qquad (14)$$

При підстановці замість t його значення ($t=-x^2$) ряд (14) матиме вигляд

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+\frac{\left(-1\right)^n x^{2n}}{n!}+\ldots\ .$$

За формулою (9) знайдемо радіус збіжності одержаного ряду. Враховуючи, що коефіцієнти $\left|a_n\right|=\frac{1}{n!},\ \ \left|a_{n+1}\right|=\frac{1}{\left(n+1\right)!}$, тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!}:\frac{1}{\left(n+1\right)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\cdot n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(n+1\right)=\infty,$$

$R=\infty$.

Ряд збіжний на всій числовій осі $\left(-\infty,+\infty\right)$.

Приклад 5. Розкладаючи підінтегральну функцію в ряд обчислити з точністю до $0,001$ визначений інтеграл

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Розв'язання. Підінтегральну функцію $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}$ розвинемо у біноміальний ряд, використовуючи формулу (13), яку перепишемо у вигляді

$$\left(1+t\right)^m=1+\frac{m}{1!}t+\frac{m\left(m-1\right)}{2!}t^2+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{3!}t^3+\ldots\ .$$

Позначимо $t=x^4$, $m=-\dfrac{1}{4}$ і одержимо таке розвинення для функції:

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}=1+\frac{-\frac{1}{4}}{1!}x^4+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{2!}x^8+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{3!}x^{12}+\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{4\cdot1!}x^4+\frac{1\cdot5}{4^2\cdot2!}x^8-\frac{1\cdot5\cdot9}{4^3\cdot3!}x^{12}+\frac{1\cdot5\cdot9\cdot13}{4^4\cdot4!}x^{16}-\ldots\ .$$

Підставимо розвинення функції під знак інтеграла і після інтегрування обчислимо його наближено, взявши стільки членів, щоб решта ряду була меншою від $0,001$. Щоб не одержати похибки від округлення, будемо брати чотири знаки після коми.

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int_0^1\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{4\cdot1!}x^4+\frac{1\cdot5}{4^2\cdot2!}x^8-\frac{1\cdot5\cdot9}{4^3\cdot3!}x^{12}+\frac{1\cdot5\cdot9\cdot13}{4^4\cdot4!}x^{16}-\ldots\right)dx=$$

$$=1-\frac{1}{20}+\frac{5}{288}-\frac{45}{4992}+\frac{585}{104448}-\ldots\approx1-0,0500+0,0174-0,0090+0,0052-0,0004=$$

$$=\left(x-\frac{x^5}{5\cdot4\cdot1!}+\frac{5x^9}{9\cdot4^2\cdot2!}-\frac{5\cdot9x^{13}}{13\cdot4^3\cdot3!}+\frac{5\cdot9\cdot13x^{17}}{17\cdot4^4\cdot4!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(1+0,0174+0,0052\right)-\left(0,05+0,0090\right)=1,0326-0,0590=0,9736\approx0,974.$$

<u>Відповідь</u>. $I\approx0,974$.

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Означення. *Подією* називається факт, який може відбутися або не відбутися в результаті досліду.

При цьому той чи інший результат досліду може бути отриманий з різним ступенем можливості. Тобто в деяких випадках можна сказати, що одна подія відбудеться практично зажди, інша – практично ніколи.

Події також мають особливості по відношенню однієї до іншої, тобто в одному випадку подія A може відбутись сумісно з подією B, в іншому – ні.

Означення. Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших.

Класичним прикладом несумісних подій є результат підкидання монети – випадання лицьової сторони монети виключає випадання зворотної сторони (в одному і тому ж досліді).

Означення. *Повною групою подій* називається сукупність усіх можливих результатів досліду.

Означення. *Достовірною* подією називається подія, яка відбудеться в результаті досліду. Подія називається *неможливою*, якщо воно ніколи не відбудеться у результаті досліду.

Наприклад, якщо з коробки, що містить лише червоні і зелені кульки, навмання виймають одну кульку, то поява серед вийнятих кульок білої – неможлива. Поява червоної і поява зеленої кульок утворюють повну групу подій.

Означення. Події називають *рівноможливими*, якщо немає підстав вважати, що одна з них з'явиться в результаті досліду з більшою ймовірністю.

У наведеному прикладі поява червоної і зеленої кульок – рівноможливі події, якщо у коробці знаходиться однакова кількість червоних і зелених кульок.

Якщо ж у коробці червоних кульок більше, ніж зелених, то поява зеленої кульки – подія менш імовірнісна, ніж поява червоної.

Виходячи з цих загальних понять можна дати означення ймовірності.

Означення. *Ймовірністю* події A називається математична оцінка можливості появи цієї події у результаті досліду. Ймовірність події A рівна відношенню кількості сприятливих подій результатів досліду до загальної кількості попарно несумісних результатів досліду, що утворюють повну группу подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{8.1}$$

Результат випробування є сприятливим події A, якщо поява в досліді цього результату тягне за собою появу появу події A.

Очевидно, що ймовірність достовірної події рівна одиниці, а ймовірність неможливої – рівна нулю. Таким чином, значення ймовірності будь-якої події – є додатнє число, що міститься між нулем і одиницею:

$0 \le P(A) \le 1$.

Приклад У коробці знаходяться 10 кульок. 3 з них червоні, 2 – зелені, інші білі. Знайти імовірність того, що вийнята навмання кулька буде червоною, зеленою або білою.

● Поява червоної, зеленої і білої кульок складають повну групу подій. Позначимо появу червоної кульки – подія *A*, поява зеленої – подія *B*, поява білої – подія *C*.

У відповідності до вищевказаних формул, отримаємо:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10}.$$

Відмітимо, що імовірність настання однієї з двох попано несумісних подій рівна сумі імовірностей цих подій.

Означення. *Відносною частотою* події *A* називається відношення кількості дослідів, у результаті яких відбулась подія *A*, до загальної кількості дослідів.

Відмінність відносної частоти від ймовірності полягає в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього добутку дослідів , а відносна частота – після досліду.

Так в розглянутому вище прикладі, якщо з коробки навмання вилучено 5 кульок і 2 з них виявилися червоними, то відносна частота появи червоної кульки дорівнює :

$$W(A) = \frac{2}{5}.$$

Як видно, ця величина не збігається зі знайденою ймовірністю.

При досить великій кількості проведених дослідів відносна частота змінюється мало, коливаючись близько одного числа. Це число може бути прийнято за ймовірність події.

Взагалі кажучи, класичне визначення ймовірності – досить відносне. Це обумовлено тим, що на практиці складно уявити результат досліду у вигляді сукупності елементарних подій, довести, що події рівноімовірні.

Наприклад, при проведенні досліду з підкиданням монети на результат досліду можуть впливати такі фактори як несиметричність монети, вплив її форми на аеродинамічні характеристики польоту, атмосферні умови і т.і.

Класичне визначення ймовірності не застосовується до випробувань з нескінченним числом результатів. Щоб подолати цей недолік вводиться поняття *геометричної ймовірності*, тобто ймовірності попадання точки в будь-який відрізок або частину площини (простору).

Так, якщо на відрізку довжиною *L* виділений відрізок довжини *l*, то ймовірність попадання навмання взятої точки у відрізок *l* дорівнює відношенню *l/L*.

Означення. Подія *A* називається *незалежною* від події *B*, якщо імовірність події *A* не залежить від того, відбулась подія *B* чи ні. Подія *A* називається залежною від події *B*, якщо імовірність події *A* змінюється в залежності від того, відбулась подія *B* чи ні.

Означення. Імовірність події *B*, обчислена при умові, що мала місце подія *A*, називається *умовною імовірністю* події *B:*

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A).$$

Теорема (*множення імовірностей*). *Імовірність добутку двох подій (сумісної їх появи) рівна добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність ідругої, обчислену при умові, що перша подія уже настала:*
$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B).$

Також можна записати: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A).$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з означення умовної імовірності.

Якщо події незалежні, то $P(B/A) = P(B)$, і теорема множення імовірностей матиме вигляд:

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (8.4)$$

У разі добутку кількох залежних подій ймовірність дорівнює добутку одного з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що ймовірність кожного наступного обчислюється в припущенні, що всі інші події вже відбулися.
$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$

З теореми добутку ймовірностей можна зробити висновок про ймовірність появи хоча б однієї події.

Якщо в результаті випробування може з'явитися *n* подій, незалежних в сукупності, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює:
$P(A) = 1 - q_1q_2...q_n.$

Тут подія A означає настання хоча б однієї з подій A_i, а q_i – імовірність протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Приклад З повної колоди карт (52 шт.) одночасно дістають чотири карти. Знайти імовірність того, що серед цих чотирьох карт буде хоча б одна бубнова або чирвова карта.

● Позначимо появу хоча б однієї бубнової карти – подія *A*, поява хоча б однієї чирвової карти – подія *B*. Таким чином, потрібно визначити імовірність події $C = A + B$.

Крім того, події *A* і *B* – сумісні, тобто поява однієї з них не виключає появи іншої.

Всього в колоді 13 чирвових і 13 бубнових карт.

При витягування першої карти імовірність того, що не з’явиться ні чирвова ні бубнова карта рівна $\frac{26}{52}$, при витягуванні другої карти – $\frac{25}{51}$, третьої – $\frac{24}{50}$, четвертої – $\frac{23}{49}$.

Тоді імовірність того, що серед вийнятих карт не буде ні бубнових, ні чирвових рівна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тоді $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945.$

Приклад Чому рівна імовірність того, при підкиданні трьох гральних кісток 6 очок з’явиться хоча б на одній з кісток?

● Імовірність випадання 6 очок при одному кидку рівна $\frac{1}{6}$. Імовірність того, що не випаде 6 очок – $\frac{5}{6}$. Ймовірність того, що при кидку трьох кісток не випаде жодного разу 6 очок рівна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тоді імовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очок рівна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Приклад У барабані револьвера знаходяться 4 патрони з шести у довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок двічі. Знайти ймовірності хоча б одного пострілу; двох пострілів; двох осічо.

● Імовірність пострілу при першому натисканні на курок (подія A) рівна $P(A) = \frac{4}{6}$, імовірність осічки – $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$. Ймовірність пострілу при другому натисканні на курок залежить від результату першого натискання.

Так, якщо у першому випадку відбувся постріл, то у барабані залишилось лише 3 патрони, причому вони розподілені по 5 гніздам, так як при другому натисканні на курок навпроти ствола не може опинитися гніздо, у якому був патрон при першому натисканні на курок.

Умовна ймовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\overline{B}/A) = \frac{2}{5}$, якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{5}$ – якщо першого разу була осічка.

Розглянемо імовірності того, що у другому випадку буде постріл (подія B) або відбудеться осічка (подія $\overline{B}$) при умові, що першого разу був постріл (подія A) або осічка (подія $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ – два постріли поспіль;

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перша осічка, другий постріл;

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ – дві осічки поспіль.

Ці чотири випадки утворюють повну групу подій (сума їх імовірностей рівна одиниці).

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що імовірність хоча б одного пострілу рівна сумі $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$.

Тепер розглянемо інший випадок. Представимо, що після першого натискання на курок барабан розкрутили і знову натиснули на курок.

Ймовірності першого пострілу і першої осічки не змінились $-\ P(A)=\frac{4}{6},\ P(\overline{A})=\frac{2}{6}.$ Умовні імовірності другог пострілу і осічки обчислюються з умови, що навпроти ствола може опинитись те ж гніздо, що й першого разу.

Умовна імовірність пострілу при другій спробі $-\ P(B/A)=\frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(B/\overline{A})=\frac{4}{6}$ – якщо першого разу була осічка.

Умовна імовірність осічки другого разу $-\ P(\overline{B}/A)=\frac{3}{6}$, якщо першого разу був постріл, $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}$ – якщо була осічка.

Тоді:

$P(B)=P(A)P(B/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ – два постріли поспіль;

$P(B)=P(\overline{A})P(B/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\approx 0{,}222$ – перша осічка, другий постріл;

$P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B}/A)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{9}\approx 0{,}333$ – перший постріл, друга осічка;

$P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}\approx 0{,}111$ – дві осічки поспіль.

В цьому випадку імовірність того, що відбудеться хоча б один постріл, рівна:

$P_2=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{8}{9}\approx 0{,}889.$

Приклад Два стрілки стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,7, а для другого – 0,8. Знайти імовірність того, що при одному залпі в мішень влучить тільки один із стрілків.

● Позначимо попадання в ціль першим стрілком – подія A, другим – подія B, промах першого стрілка – подія $\overline{A}$, промах другого – подія $\overline{B}$.

$P(A)=0{,}7;\quad P(\overline{A})=0{,}3;\quad P(B)=0{,}8;\quad P(\overline{B})=0{,}2.$

Імовірність того, що перший стрілок влучить у мішень, а другий – ні, рівна:

$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14.$

Імовірність того, що другий стрілок влучить у мішень, а перший – ні, рівна:

$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24.$

Тоді імовірність влучення в ціль лише одним стрілком рівна:

$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38.$

Той же результат можна отримати іншим способом: знаходимо імовірності того, що обидва стрілки влучили в ціль і обидва промахнулись. Ці імовірності відповідно рівні:

$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56;\quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$

Тоді імовірності того, що в ціль влучить лише один стрілок, рівна:

$P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$

Приклад Імовірність того, що навмання узята деталь з деякої партії деталей буде бракованою, рівна 0,2. Знайти імовірність того, що з трьох узятих деталей 2 виявляться не бракованими.

●Позначимо браковану деталь – подія A, не браковану – подія $\overline{A}$.

$P(A) = 0{,}2; \quad P(\overline{A}) = 0{,}8.$

Якщо серед трьох деталей буде тільки одна бракована, то це можливо в одному з трьох випадків: бракована деталь буде першою, другою або третьою.

$P = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(\overline{A})P(A);$

$P = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}384.$

Приклад Імовірності того, що потрібна деталь знаходиться у першому, другому, третьому або четвертому ящику. Знайти імовірності того, що ця деталь знаходиться: а) не більш, ніж у трьох ящиках; б) не менш, ніж у двох ящиках.

● а) Імовірність того, що дана деталь знаходиться у всіх чотирьох ящиках, рівна:

$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$

Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не більш, ніж у трьох ящиках, рівна імовірності того, що вона не знаходиться в усіх чотирьох ящиках:

$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$

б) Імовірність того, що потрібна деталь знаходиться не менш, ніж у двох ящиках, складається з імовірностей того, що деталь знаходиться тільки у двох ящиках, тількі у трьох ящиках, тільки у чотирьох ящиках. Звичайно, ці ймовірності можна порахувати, а потім додати, поднак, простіше зробити інакше. Та ж імовірність рівна імовірності того, що деталь не знаходиться лише в одному ящику і мається взагалі.

Імовірність того, що деталь знаходиться тільки в одному ящику, рівна:

$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4;$

$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$

$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404.$

$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596.$

Імовірність того, що потрібної деталі немає в жодному ящику, рівна:

$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024;$

$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976.$

Шукана імовірність рівна: $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$

9.3. Формула повної імовірності.

Нехай деяка подія A може відбутися з однією з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які складають повну групу подій. Нехай відомі імовірності цих подій $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ та умовні імовірності настаня події A при настанні події H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Імовірність події А, яка може відбутися разом з однією з подій* $H_1, H_2, ..., H_n$, *рівна сумі парних добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідні їм умовні імовірності настання події А:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i) \tag{8.5}$$

Приклад Один з трьох стрілків робить два постріли. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрілка рівна 0,4, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти імовірність того, що в ціль влучать двічі.

● Імовірність того, що постріли робить перший, другий або третій стрілок рівна $\frac{1}{3}$.

Імовірності того, що один із стрілків двічі влучить в ціль, рівні:

– для першого стрілка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16$;

– для другого стрілка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$;

– для третього стрілка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$.

Шукана імовірність рівна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}.$$

9.4. Формула Байєса (формула гіпотез).

Нехай маємо повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ з відомими ймовірностями їх настання $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Нехай у результаті досліду настала подія *A*, умовні імовірності якої по кожній з гіпотез відомі, тобто відомі імовірності $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Потрібно визначити, які імовірності мають гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ відносно події *A*, тобто умовні імовірності $P(H_i/A)$.

Теорема. *Імовірність гіпотези після випробування рівна добутку імовірності гіпотези до випробування на відповідну їй умовну імовірність події, яка відбулася при випробуванні, поділену на повну імовірність цієї події:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)} \tag{8.6}$$

Ця формула називається *формулою Байєса.*

9.5. Повторення випробувань. Формула Бернуллі.

Якщо проводиться кілька випробувань , в результаті яких може відбутися або не відбутися подія A , і ймовірність появи цієї події в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань , то такі випробування називаються *незалежними* відносно події A.

Припустимо, що подія A настає в кожному випробуванні з ймовірністю $P(A)=p$. Визначимо ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія A настала рівно m разів.

Цю ймовірність можна порахувати, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, як це робилося у розглянутих вище прикладах. Однак, при досить великій кількості випробувань це призводить до дуже великих обчислень. Таким чином, виникає необхідність розробити спільний підхід до вирішення поставленого завдання. Цей підхід реалізований у *формулі Бернуллі* (Якоб Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик).

Нехай у результаті n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах, подія A настає з імовірністю $P(A)=p$, а протилежна йому подія $\overline{A}$ з ймовірністю $P(\overline{A}) = 1 - p$.

Позначимо A_i – настання події A у випробуванні з номером i. Оскільки умови проведення випробувань однакові, то ці ймовірності рівні.

Якщо в результаті n дослідів подія A настає рівно m разів, то інші $n–m$ раз ця подія не настає. Подія A може з'явитися m раз в n випробуваннях в різних комбінаціях, число яких дорівнює кількості сполучень з n елементів по m. Ця *кількість сполучень* знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (8.7)$$

Імовірність кожної комбінації дорівнює добутку ймовірностей: $p^m(1-p)^{n-m}$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо *формулу Бернуллі*:

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (8.7)$$

Формула Бернуллі важлива тим, що справедлива для будь-якої кількості незалежних випробувань, тобто того самого випадку, в якому найбільш чітко проявляються закони теорії ймовірностей.

Приклад По цілі проводиться 5 пострілів. Ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили не менше трьох разів.

● Імовірність не менше трьох влучень складається з ймовірності п'яти влучень, чотирьох влучень і трьох влучень. Оскільки постріли незалежні, то можна застосувати формулу Бернуллі ймовірності того, що в m випробуваннях подія в ймовірністю p настає рівно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

У разі п'яти влучень з п'яти можливих: $P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024.$

Чотири влучення з п'яти пострілів: $P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768.$

Три влучення з п'яти: $P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304.$

Остаточно, отримуємо ймовірність не менше трьох влучень з п'яти пострілів:
$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744.$

9.10. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, коли неможливо знайти закон розподілу, або цього не потрібно, можна обмежитись знаходженням значень, які називаються числовими характеристиками випадкової величини. Ці величини визначають деяке середнє значення, навколо якого групуються значення випадкової величини, і ступінь їх розкиданості навколо цього середнього значення.

Означення. *Математичним очікуваням* дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх імовірності:

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (8.10)$$

Математичне очікування існує, якщо ряд, що стоїть у правій частині рівності, збіжний абсолютно.

З точки зору імовірності можна сказати, що математичне очікування наближено рівне середньому арифметичному значень випадкової величини, що розглядається.

9.11. Властивості математичного очікування.

1) Математичне очікування сталої величини рівне самій сталій: $M(C) = C.$

2) Сталий множник можна виносити за знак математичного очікування: $M(Cx) = CM(x).$

3) Математине очікування добутку двох незалежних випадкових величин рівний добутку їх математичних очікувань:
$M(XY) = M(X)M(Y).$

Ця властивість справедлива для довільної кількості випадкових величин.

4) Математичне очікування суми двох випадкових величин рівне сумі математичних очікувань доданків:
$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$

Ця властивість також справедлива для довільної кількості випадкових величин.

Нехай проводиться *n* незалежних випробувань, імовірність появи події *A* у яких рівна *p*.

Теорема. *Математичне очікування M(X) числа появи події A в n незалежних випробуваннях рівне добутку числа випробувань на імовірність появи події у кожному випробуванні:*

$M(X) = np.$

Однак, математичне очікуваня не може повністю характеризувати випадковий процес. Крім математичного очікування потрібно увести величину, яка характеризує відхилення значень випадкової величини від математичног очікування.

Це відхилення рівне різниці між випадковою величиною та її математичним очікуваням. При цьому математичне очікування відхилення рівне нулю. Це пояснюється тим, що одні можливі відхилення додатні, інші від'ємні, і у результаті їх взаємного погашення отримуємо нуль.

Означення. *Дисперсією* (*розсіюванням*) дискретної випадкової величини називається математичне очікування квадрта відхилення випадкової величини від її математичного очікування:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \tag{8.11}$$

Приклад Для розглянутого вище прикладу закон розподілу випадкової величини має вигляд:

X	0	1	2
P	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне очікування та дисперсію випадкової величини.

● Маємо: $M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5.$

Можливі значення квадрата відхилення:

$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25;$

$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25;$

$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25.$

Тоді

[X–M(X)]²	2,25	0,25	0,25
P	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсія рівна: $D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375.$

Однак, на практиці подібний спосіб обчислення дисперсії незручний, так як при великій кількості значень випадкової величини до громіздких обчислень.

Тому використовується інший спосіб.

9.12. Обчислення дисперсії.

Теорема. *Дисперсія рівна різниці між математичним очікуваням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного очікування:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{8.12}$$

Застосуємо цю формулу для розглядуваного вище прикладу:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
P	0,0625	0,375	0,5625

$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625.$

$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375.$

9.13. Властивості дисперсії.

1) Дисперсія сталої величини рівна нулю: $D(C) = 0.$

2) Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату:

$D(CX) = C^2 D(X).$

3) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$

4) Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин рівна сумі дисперсій цих величин:

$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$

Справедливість цієї рівності витікає з властивості 2.

Теорема. *Дисперсія числа появи події А в n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність p появи події стала, рівна добутку числа випробувань на імовірності появи і не появи події в будь-якому випробуванні:*

$$D(X) = npq. \qquad (8.13)$$

9.14. Середнє квадратичне відхилення.

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини Х називається квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (8.14)$$

Теорема. *Середнє квадратичне відхилення суми скінченної кількості взаємно незалежних випадкових величин рівне квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:*

$$\sigma(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \ldots + \sigma^2(X_n)}.$$

Приклад Завод випускає 96% виробів першого сорту та 4% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Нехай Х – число виробів першого сорту у даній вибірці. Знайти закон розподілу, математичне очікування та дисперсію випадкової величини *X*.

● Вибір кожного з 1000 виробів можна вважати незалежним випробуванням, у якому імовірність появи виробів першого сорту однакова і рівна *p*=0,96.

Таким чином, закон розподілу може вважатися біноміальним:

$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$

$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4.$

Приклад Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – число появи події A у двох незалежних випробуваннях, якщо імовірності появи цієї події у кожного випробуванні рівні і відомо, що $M(X)$=0,9.

● Так як випадкова величина X розподілена по біномінальнгму закону, то

$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$

$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2\cdot 0{,}45\cdot 0{,}55 = 0{,}495.$

Приклад Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A у кожному випробуванні. Знайти імовірність появи події A, якщо дисперсія числа появи події у трьох незалежних випробуваннях рівна 0,63.

● По формулі дисперсії біноміального закону отримуємо:

$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0{,}63;$

$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0;$

$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$

$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3.$

Приклад Досліджується пристрій, що складається з чотирьох незалежно працюючих приладів. Імовірності відмови кожного приладів рівні відповідно $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Знайти математичне очікування і дисперсію кількості приладів, що відмовили.

● Приймаючи за випадкову величину кількість приладів, що відмовили, бачимо, що ця випадкова величина може приймати значення 0, 1, 2, 3 або 4.

Для складання закону розподілу цієї випадкової величини необхідно визначити відповідні імовірності. Приймемо $q_i = 1 - p_i$.

1) Не відмовив жодний прилад: $p(0) = q_1q_2q_3q_4 = 0{,}7\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4 = 0{,}084.$

2) Відмовив один з приладів:

$p(1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 = 0{,}302.$

3) Відмовили два прилади:

$p(2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 = 0{,}38.$

4) Відмовили три прилади:

$p(3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 = 0{,}198.$

5) Відмовили усі прилади:

$p(4) = p_1p_2p_3p_4 = 0{,}036.$

Отримаємо закон розподілу:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математичне очікування:

$M(X) = 0{,}302 + 2\cdot 0{,}38 + 3\cdot 0{,}198 + 4\cdot 0{,}036 = 1{,}8.$

$M(X^2) = 0{,}302 + 4\cdot 0{,}38 + 9\cdot 0{,}198 + 16\cdot 0{,}036 = 4{,}18.$

Дисперсія: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$

Контрольна робота №3 (4 семестр)

1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. а) $\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0$; б) $\left(xy+x^2\right)y'=y^2$.

2. а) $x^2y^2y'=y+3$; б) $xy'+y=x+1$.

3. а) $\left(x^2+2\right)y'+2xy^2=0$; б) $\left(2xy+y^2\right)y'=y^2$.

4. а) $\left(3x+xy^2\right)y'=4$; б) $2xyy'=x^2-y^2$.

5. а) $\left(x^2+2\right)y'=2x-xy^2$; б) $xy'+4y=x^4$.

6. а) $y^2+4=\left(x^2y-4y\right)y'$; б) $xy'+2y=x^2$.

7. а) $\left(4+x^2\right)y'=3x+3y^2$; б) $x^2y'=xy-y^2$.

8. а) $\left(2+x^2\right)y'=x+3xy$; б) $y'-y=e^x$.

9. а) $\left(1+x^2\right)y'=x+2xy$; б) $xy^2y'=x^3+y^3$.

10. а) $\left(x^2+2\right)y'=-2xy^2$; б) $xy'+y=x+1$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

1. $y''+3y'+2y=8x^2+4;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.

2. $y''-3y'+2y=18xe^{-x};\quad y(0)=-1,\ y'(0)=1$.

3. $y''-4y'+4y=8\cos x;\quad y(0)=2,\ y'(0)=-1$.

4. $y''+4y'+4y=x^2+x+2;\quad y(0)=-2,\ y'(0)=1$.

5. $y''-2y'+5y=3xe^{2x};\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.

6. $y''-2y'+15y=-45x^2+7,2;\quad y(0)=2,\ y'(0)=-2$.

7. $y''+y'-6y=39\sin 3x;\quad y(0)=3,\ y'(0)=-1$.

8. $y''-y'-6y=27\cos 2x;\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$.

9. $y''+10y'+25y=-25x^2+25; \quad y(0)=4, \; y'(0)=3.$

10. $y''+4y'+8y=8x^2+16x+6; \quad y(0)=2, \; y'(0)=0.$

3. Дослідити збіжність числових рядів.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n-1)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n-2)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n-3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3}}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n-4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^2}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n(n+3)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{2n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^3}}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(n+4)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{3n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^4}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n(n-5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-5}{4n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n(n+5)}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{5n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n^5}}$.

4. Розвинути функцію $y=f(x)$ в ряд Маклорена і знайти радіус збіжності одержаного ряду.

1. $f(x)=e^{-2x}$.

2. $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.

3. $f(x)=e^{\frac{x}{5}}$.

4. $f(x)=\sin 2x$.

5. $f(x)=\sin\frac{x}{3}$.

6. $f(x)=\cos 3x$.

7. $f(x)=\cos\frac{x}{4}$.

8. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

9. $f(x)=\sqrt[3]{1+x^3}$.

10. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Знайти область збіжності функціонального ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}x^n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}x^n$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+3}x^n$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+4}x^n$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+4}x^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n+5}x^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n+5}x^n$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n+6}x^n$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n+6}x^n$.

6. Розв’язати задачі.

1. Є 5 видів конвертів без марок і 4 види марок однакової вартості. Скількома способами можна вибрати конверт із маркою для посилки листа?

2. Гральна кістка кинута 3 рази. Яка ймовірність того, що при цьому всі грані, що випали, різні?

3. Один повелитель, якому набрид його астроном (багато казав неправди), вирішив його стратити. Однак, будучи добрим повелителем, він вирішив дати астроному останній шанс. Йому потрібно було розподілити по 2 ящикам 4 кульки: 2 чорні і 2 білі. Палач вибере навмання один з ящиків і з неї візьме одну кульку. Якщо кулька буде чорна, то астронома стратять,

якщо ж біла – залишиться жити. Яким чином астроному потрібно розмістити кульки в ящиках, щоб забезпечити собі максимальну імовірність залишитися живим?

4. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює нулю.

5. Імовірність випустити «фахівця» – 0,95. Скільки має бути випускників, щоб найімовірніша кількість «нефахівців» була 15?

6. Імовірність виграшу по одному білету лотереї рівна $\frac{1}{7}$. Яка імовірність того, що, придбавши 5 білетів, можна виграти по усім п’яти білетам.?

7. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирається одна, а з тих, що залишились – друга. Знайти імовірність того, що буде вибрана непарна цифра другого разу.

8. Курсант забув останню цифру номера телефону батьків і тому набирає її навмання. Знайти імовірність того, що йому прийдеться зробити рівно 2 невдалі спроби.

9. В сім’ї 5 дітей. Знайти імовірність того, що серед дітей 4 хлопчики, якщо імовірності народження хлопчика і дівчинки по 0,5.

10. Курсант написав шпаргалки на 20 білетів з 25. Яка імовірність того, що з трьох білетів, які залишились на столі, у нього є шпаргалки принаймні на 2?

7. Знайти математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

1.

x_i	–3	–2	–1	0	2	4
p_i	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3

2.

x_i	–2	–1	0	1	3	4
p_i	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2

3.

x_i	–2	–1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

4.

x_i	1	3	4	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3	0,2

5.

x_i	0	2	3	5	6	8
p_i	0,3	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

6.

x_i	3	4	5	6	8	10
p_i	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,1

7.

x_i	–1	0	1	4	7	8
p_i	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

8.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2

9.

x_i	–2	–1	0	1	3	5
p_i	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,2

10.

x_i	–1	0	2	3	5	6
p_i	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1