Державна служба України з надзвичайних ситуацій

Національний університет цивільного захисту України

Черкаський інститут пожежної безпеки
ім. Героїв Чорнобиля

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 1 З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СЛУХАЧАМИ ЗАОЧНОГО НАВЧАННЯ

Кафедра вищої математики та інформаційних технологій

Черкаси, 2020 рік

Загальні методичні вказівки

Виконувати роботу необхідно за варіантом, який видає кафедра. Робота, виконана не за своїм варіантом, не перевіряється, не зараховується і повертається слухачеві.

Титульна сторінка оформлюється згідно встановленого зразка.

Умови усіх задач повинні записуватися повністю, графіки виконуватись охайно.

Розв'язування прикладів і задач повинні супроводжуватись усіма обчисленнями та формулами, які використовуються, а також короткими поясненнями.

Якщо робота не зараховується, слухач виправляє її і представляє ще раз.

Контрольна робота містить 10 варіантів. Варіант вибирають за останньою цифрою шифру.

Розділ 1. Елементи лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії

1.1. *<u>Матрицею</u>* називається прямокутна таблиця упорядкованих чисел або функцій

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця $\boldsymbol{A}$ має $\boldsymbol{m}$ рядків та $\boldsymbol{n}$ стовпців. Розмір її – $\boldsymbol{(m,n)}$.

Види матриць: матриця-рядок $A=(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$.

матриця-стовпець $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{1n} \end{pmatrix}$.

одинична матриця $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

транспонована матриця – це матриця, яка одержана з даної заміною рядків стовпцями.

Матриця $\boldsymbol{A^{-1}}$ називається *<u>оберненою</u>* до матриці $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{(\det A\neq 0)}$, якщо виконується співвідношення $\boldsymbol{A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A=E}$.

Щоб дістати обернену матрицю, потрібно:

1) знайти визначник матриці $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{(\det A\neq 0)}$;

2) збудувати матрицю, у якої на місцях елементів стоять їх алгебраїчні доповнення, та транспонувати її. Така матриця називається *<u>приєднаною</u>*

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3) компоненти матриці $\boldsymbol{\bar{A}}$ помножити на $\frac{1}{|A|}$, де $|A|$ – визначник матриці $\boldsymbol{A}$.

$$A^{-1} = \overline{A} \cdot \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$

Матриці можна додавати, віднімати, множити на число.

Добуток матриці ***A*** на матрицю ***B*** існує лише тоді, коли кількість стовпців першого співмножника дорівнює кількості рядків другого. Такі матриці називаються *<u>узгодженими</u>*. Для цього потрібно виконати по елементне множення ***1***-го рядка матриці ***A*** на ***k***-й стовпець матриці ***B***.

1.2. *<u>Визначником (детермінантом) другого порядку</u>* називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

<u>Визначником (детермінантом) третього порядку</u> називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Алгебраїчні доповнення будь-якого елемента a_{ij} визначника – це визначник, який утвориться з даного, якщо закреслити в ньому стовпець та рядок, до яких належить обраний елемент, причому цей визначник беруть зі знаком «+», якщо сума номерів стовпця і рядка елемента парна, і «–», – якщо непарна.

Мінор будь-якого елемента a_{ij} визначника – це алгебраїчне доповнення цього елемента без знака. Мінор елемента a_{ij} позначимо M_{ij}, алгебраїчне доповнення A_{ij}. Тоді $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

1.3. *<u>Розв'язування системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими</u>*.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Визначник третього порядку, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається головним визначником системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Позначимо $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ визначники, утворені з головного визначника системи заміною стовпця коефіцієнтів при відповідному невідомому стовпцем вільних членів:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера. Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок: $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$

Матричний спосіб.

Введемо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця системи,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриці-стовпці невідомих і вільних членів.

Система рівнянь у матричній формі записується у вигляді: $\boldsymbol{A \cdot X = B}$.

Помножимо обидві частини рівняння на матрицю $\boldsymbol{A^{-1}}$, обернену до матриці $\boldsymbol{A}$: $A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$

Враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E, E \cdot X = X,$ маємо розв'язок: $X = A^{-1} \cdot B.$

1.4. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

У декартовій прямокутній системі координат будь-який вектор можна розкласти на суму трьох компонентів: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де x, y, z – координати вектора $\vec{a} = (x, y, z)$, i, j, k – одиничні вектори-орти.

Довжина вектора $\vec{a}$ визначається за формулою: $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається скаляр, який дорівнює добутку їх довжин та косинуса кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Нехай $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$,

$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, тоді

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$

З означення скалярного добутку можна знайти *кут між векторами*:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, довжина якого рівна площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

З означення векторного добутку можна вивести формулу *площі трикутника*, яка дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на цих векторах, тобто половині модуля векторного добутку векторів-сторін трикутника:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Нехай задано три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ називається мішаним добутком. Якщо відомо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то мішаний добуток має вигляд:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Абсолютне значення мішаного добутку чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

$$V_{пар} = \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \right|.$$

Як відомо, об’єм тетраедра дорівнює одній шостій об’єму паралелепіпеда:

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} \cdot \left| \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \right|.$$

1.5. *Площина та пряма в просторі.*

а) $Ax + By + Cz = 0$ – загальне рівняння площини

б) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння площини, подане відрізками, відрізуваними площиною на координатних осях.

в) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – рівняння площини, що проходить через три точки.

г) Якщо положення площини в просторі визначає нормальний вектор цієї площини, то задачу знаходження кута між двома площинами можна звести до знаходження кута між двома векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

д) Пряма в просторі, що проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ паралельно вектору $\vec{S} = (m, n, p)$, задається канонічним рівнянням:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

е) Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

ж) кут між прямою і площиною є кут φ між цією прямою і проекцією її на цю площину. Нехай $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальний вектор площини;

$\vec{S} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої.

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Приклади розв'язування задач.

<u>*Приклад 1.*</u> По координатах вершин піраміди

$$A_1(3,-2,2),\ A_2(1,-3,1),\ A_3(2,0,4),\ A_4(6,-4,6)$$

знайти: 1) довжини ребер A_1A_2, A_1A_3;

2) кут між ребрами A_1A_2, A_1A_3;

3) площу грані $A_1A_2A_3$;

4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

5) рівняння прямих A_1A_2, A_1A_3;

6) рівняння площин $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$;

7) кут між площинами $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_{4.}$;

<u>*Розв'язування:*</u> 1) знаходимо вектори A_1A_2, A_1A_3 :

$$A_1A_2 = (1-3)\vec{i} + (-3-(-2))\vec{j} + (2-1)\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$
$$A_1A_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Довжинами цих векторів є довжини ребер:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$
$$|A_1A_3| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

2) Кут між ребрами знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{-2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{-2}{3\sqrt{6}} \approx -0{,}27.$$

Кут φ – тупий, який дорівнює $\pi - \arccos 0{,}27 = 1{,}85$ *рад*.

3) Площу грані $A_1A_2A_3$ знаходимо як половину площі паралелограма, побудованого на векторах A_1A_2, A_1A_3, тобто половина модуля векторного добутку цих векторів:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{j} - 5\vec{k}.$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

4) Об’єм $\boldsymbol{V}$ піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4.

Вектор $A_1A_4 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$\text{Отже, } V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-30\right| = 5\,(куб.од.).$$

5) Рівняння прямих A_1A_2, A_1A_3 знаходимо за формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

$$A_1(3,\ -2,\ 2),$$
$$A_2(1,\ -3,\ 1).$$

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y+2}{-3+2} = \frac{z-2}{1-2}.$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Аналогічно знаходимо рівняння A_1A_3.

6) Рівняння площин $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ знаходимо за рівнянням площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1-3 & -3+2 & 1-2 \\ 2-3 & 0+2 & 4-2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\cdot(-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)\cdot(y+2) + (-2)\cdot 2\cdot(z-2) -$$
$$-(-1)\cdot(-1)\cdot(z-2) - 2\cdot(-1)\cdot(x-3) - (-2)\cdot 2\cdot(y+2) = 0$$
$$5y + 10 - 5z + 10 = 0$$
$$\underline{y - z + 4 = 0.}$$

Аналогічно знаходимо рівняння площини $A_1A_2A_4$.

7) Кут між площинами знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати систему рівнянь за допомогою:

1) формул Крамера;
2) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ x - 2y + 2z = 17 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

<u>*Розв'язування:*</u> 1) Знаходимо головний визначник системи і допоміжні визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -26$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -78$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 130$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -52.$$

Тоді: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-78}{-26} = 3;$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{130}{-26} = -5;$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-52}{-26} = 2$$

2) Запишемо матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю A^{-1}. Для цього обчислюємо алгебраїчні доповнення матриці А.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-5.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & 6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix},$$

Отже,
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & 6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\ 17\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-78\\ 130\\ -52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ 2\end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність обчислення оберненої матриці:

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8 & -6 & -4\\ -1 & 9 & -7\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8\cdot 2+(-6)\cdot 1+(-4)\cdot 1 & \dots & \dots\\ (-1)\cdot 2+9\cdot 1+(-7)\cdot 1 & \dots & \dots\\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 1 & \dots & \dots\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-26 & 0 & 0\\ 0 & -26 & 0\\ 0 & 0 & -26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Отже, обернена матриця обчислена правильно.

Розділ 2. Вступ до аналізу та диференціальне числення

2.1. *Границя функції*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \text{якщо} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - a| < \delta.$$

Теореми про границі

1. $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x).$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x).$

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$

4. $\lim\limits_{x\to a} C = Const$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $f(x)$ називається *нескінченно малою величиною*

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $f(x)$ називається *нескінченно великою величиною*

Види невизначеностей при обчисленні границь

$$\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^{\infty} \qquad \infty^{\infty} \qquad \infty^{0}$$

Способи розкриття невизначеностей

- скорочення на множник, який призводить до невизначеності;
- ділення чисельника і знаменника на старшу степінь аргументу (для відношення многочленів при $x \to \infty$);
- використання еквівалентних нескінченно великих;
- використання двох «чудових» границь:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

- *правило Лопіталя*: границя відношення двох нескінченно малих (нескінченно великих) функцій (невизначеності $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$), дорівнює границі відношення їх похідних: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

2.2. Похідна функції

Похідною даної *функції* $y = f(x)$ *у точці* $x = x_0$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x)\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної вживають ще й такі позначення: y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$.

Для обчислення похідних потрібно знати таблицю формул та основні правила диференціювання:

Таблиця похідних

1. $\left(u^a\right)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
4. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
5. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
6. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
7. $(\log_b u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
14. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Основні правила диференціювання

1. $c' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$

4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

7. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$

8. *Якщо* $x = x(t)$, $y = y(t)$, *то*
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

***2.3.** Неперервність функції.*

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці a,* якщо:

1) ця функція визначена в деякому околі точки a;
2) існує границя $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
3) ця границя рівна значенню функції в точці a, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Позначаючи $x - a = \Delta x$ (приріст аргумента) і $f(x) - f(a) = \Delta y$ (приріст функції), умову неперервності можна записати так: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна в точці тоді і тільки тоді, коли в цій точці нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції.*

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області (інтервалу, сегмента і т. ін.), то вона називається *неперервною в* цій *області*.

Точка *а,* що належить області визначення функції або є граничною для цієї області, називається *точкою розриву*, якщо в цій точці порушується умова неперервності функції.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ *і* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, причому не всі три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ рівні між собою, то a називається *точкою розриву I роду*.

Точки розриву I роду поділяються, в свою чергу, на *точки усувного розриву* (коли $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$) і на *точки скачка* (коли $f(a-0) \neq f(a+0)$); в останньому випадку різниця $f(a+0)-f(a-0)$ називається *скачком* функції в точці a.

Точки розриву, які не є точками розриву I роду, називаються *точками розриву II роду*. В точках розриву II роду не існує хоча б одна з односторонніх границь.

Сума і добуток скінченної кількості неперервних функцій є функція неперервна.

2.4. <u>Загальний план дослідження функцій і побудова графіків.</u>

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність чи непарність.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Дослідити функцію на неперервність; знайти точки розриву (якщо вони є) і встановити характер розриву; знайти асимптоти кривої.
5. Знайти інтервали зростання і спадання функції, її екстремуми.
6. Знайти інтервали опуклості і угнутості.

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^4+5x}{-4x^4+7}$.

Розв'язування. Підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник на старшу степінь аргументу, тобто на x^4 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\dfrac{5}{x^3}}{-4+\dfrac{7}{x^4}}=\left[\frac{5}{x^3}\to 0,\quad \frac{7}{x^4}\to 0\right]=\frac{12+0}{-4+0}=-3.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\ln\left(1-x^2\right)}$.

Розв'язування. Тут невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Використовуємо метод заміни нескінченно малих еквівалентними.

Так як при $x \to 0 \quad 1-\cos 4x = 2\sin^2 2x \cong 8x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\ln\left(1-x^2\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-x^2} = -8.$$

<u>*Приклад 3.*</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

<u>*Розв'язування*</u> Підстановка $x=-2$ призводить до невизначеності 1^{∞}. Зробимо заміну змінних: $y = x+2, \quad \lim\limits_{x\to -2} y = 0$, тоді

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}} = \left[1^{\infty},\ \textit{використовуємо } 2-y \text{ "}\textit{чудову границю}\text{"}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0}\left((1+2y)^{\frac{1}{2y}}\right)^2 = e^2 .$$

<u>*Приклад 4.*</u> Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

<u>*Розв'язування*</u> Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

<u>*Приклад 5.*</u> Обчислити похідну функції $y = tg^5 x.$

<u>*Розв'язування*</u> Це степенева функція відносно tgx, тому використовуємо формули 1 і 10:

$$y' = 5tg^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

<u>*Приклад 6.*</u> Обчислити похідну функції $y = 3^{\sin 2x}$.

<u>*Розв'язування*</u> Це показникова функція. Використовуємо формули 5 і 8:

$$y' = 3^{\sin 2x}\cdot\ln 3\cdot\cos 2x\cdot 2 = 2\cdot 3^{\sin 2x}\cdot\ln 3\cdot\cos 2x.$$

<u>*Приклад 7.*</u> Обчислити похідну функції, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

Розв'язування $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt.$

Приклад 8. Показати, що при *x=5* функція $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ має розрив.

Розв'язування В точці *x=5* функція не визначена, так як, виконавши підстановку, отримуємо невизначеність 0/0. В інших точках дріб можна скоротити на *x–5*, так як *x–5*$\neq$ 0. Значить, $y = x + 5$ *при* $x \neq 5$. Легко бачити, що $\lim\limits_{x\to 5-0} y = \lim\limits_{x\to 5+0} y = 10.$

Таким чином, при *x=5* функція має усувний розрив.

Приклад 9. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Розв'язування

1) Область визначення функції – вся вісь *Ox* за виключенням точки *x=0*, тобто $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$
2) Функція є ні парною, ні непарною, так як $f(x) \neq f(-x)$ *і* $f(-x) \neq -f(x).$
3) Знаходимо точки перетину графіка з віссю *Ox*; маємо $\dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; $x = -\sqrt[3]{4}.$
4) Точка розриву *x=0*, причому $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty.$ Отже, *x=0* (вісь *Oy*) є вертикальною асимптотою.

Знаходимо похилі асимптоти:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

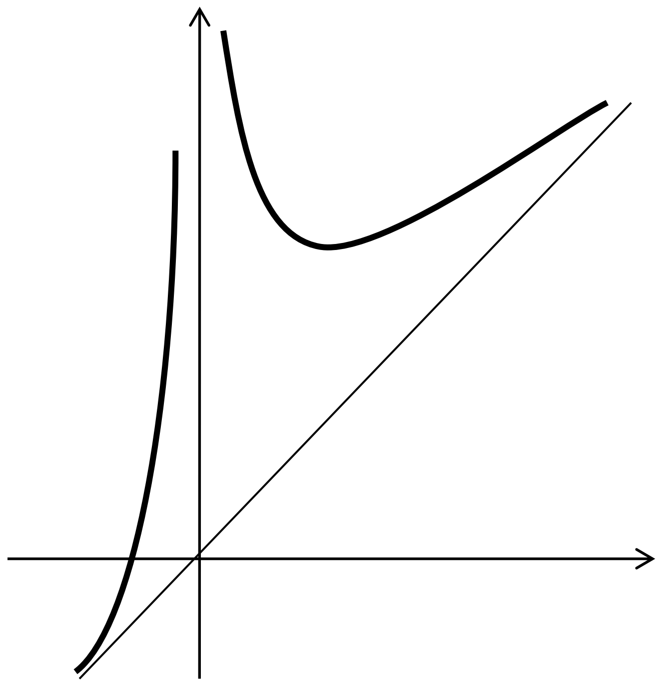
Похила асимптота має вигляд *y=x*.

5) Знаходимо екстремуми функції та інтервали зростання і спадання. Маємо: $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$; $y' = 0$ *при* $x = 2$; $y' = \infty$ *при* $x = 0$ (точка розриву функції). Точки *x=0* і *x=2* розбивають числову вісь на проміжки $(-\infty;0), (0;2), (2;+\infty),$ причому $y' > 0$ (функція зростає) в проміжках $(-\infty;0)$ *і* $(2;+\infty),$ і $y' < 0$ (функція спадає) в проміжку $(0;2).$

Далі, знаходимо $y'' = \frac{24}{x^4}$; $y''(2) > 0$, значить, $x=2$ – точка мінімуму; $y_{\min} = 3$.

6) Знаходимо інтервали опуклості і угнутості кривої і точки перегину. Так як $y'' > 0$, то графік функції всюди угнутий. Точок перегину крива не має.

Використовуючи отримані дані, будуємо графік функції:



Розділ 3. Невизначений інтеграл

3.1. *Первісна. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів.*

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною від функції* $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо для всіх точок цього відрізка виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx.$

За означенням маємо: $\int f(x)dx.=F(x)+C,$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування;

C – стала інтегрування.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$
3. $\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$
4. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$
5. $\int df(x)=f(x)+C$
6. *Якщо* $\int f(x)dx=F(x)+C,$ *то* $\int f(u)du=F(u)+C,$ *де* $u=u(x)$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} tgax + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} ctgax + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

3.2. *Інтегрування по частинах.*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

При цьому за ***u*** береться така функція, яка при диференціювання спрощується, а за ***dv*** – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої можна легко обчислити.

Слід пам’ятати:

1) $\int P(x)e^{ax}dx$ $\qquad u = P(x)$ $\qquad e^{ax}dx = dv,$

2) $\int P(x)\sin axdx$ $\qquad u = P(x)$ $\qquad \sin axdx = dv,$

3) $\int P(x)\cos axdx$ $\qquad u = P(x)$ $\qquad \cos axdx = dv,$

4) $\int P(x)\ln xdx$ $\qquad u = \ln x$ $\qquad P(x)dx = dv,$

5) $\int P(x)\arcsin xdx$ $\qquad u = \arcsin x$ $\qquad P(x)dx = dv,$

6) $\int P(x)\arccos xdx$ $\qquad u = \arccos x$ $\quad P(x)dx = dv.$

3.3. *Інтегрування тригонометричних функцій.*

1) інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція, обчислюється за допомогою універсальної підстановки $tg\frac{x}{2} = t.$ Тоді

$$\frac{x}{2} = arctgt, \qquad x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

В деяких випадках можна спростити обчислення інтегралів. Наприклад:

а) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то береться підстановка $\cos x = t$.

б) якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то береться підстановка $\sin x = t$.

в) якщо $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\cos x$ і $\sin x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то береться підстановка $tgx = t$.

2) інтеграли виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n xdx$.

- якщо m – непарне додатнє число, то береться підстановка $\cos x = t$.
- якщо n – непарне додатнє число, то – $\sin x = t$.
- якщо m і n – парна додатні числа, то для перетворення підінтегральної функції використовуються формули:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

3) інтеграли виду $\int tg^m xdx$ i $\int ctg^m xdx$, де m – додатнє число.

Для знаходження таких інтегралів використовуються формули:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$

$$ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

3.4. Інтегрування раціональних дробів.

Означення. *Раціональним дробом* називається дріб виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менше степені многочлена $Q(x)$.

Прості дроби – це правильні дроби виду:

- $\dfrac{A}{x-a}$;
- $\dfrac{A}{(x-a)^m}, \quad m \in Z, \quad m > 1;$
- $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+g}, \quad \dfrac{p^2}{4} - g < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R;$
- $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+g\right)^m}, \quad m \in Z, \quad m > 1, \quad \dfrac{p^2}{4} - g < 0 \Rightarrow x_{1,2} \notin R.$

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.

$$\int\left(5x^4 - 7\sin 2x + 4e^{3x} + 2\right)dx = 5\int x^4 dx - 7\int \sin 2x dx + 4\int e^{3x} dx + 2\int dx =$$
$$= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 7\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2x + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{3x} + 2x + C = x^5 - \frac{7}{2}\cos 2x + \frac{4}{3}e^{3x} + 2x + C.$$

Приклад 2.

$$\int x\cdot 7^{x^2} dx = \begin{bmatrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{2}{2}dt \end{bmatrix} = \int 7^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int 7^t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{7^t}{\ln 7} + C = \frac{7^{x^2}}{2\ln 7} + C.$$

Приклад 3.

$$\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} \arcsin x = t \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dt \end{bmatrix} = \int\sqrt{t}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C.$$

Приклад 4.

$$\int x^2 \cdot \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} uv - \int v du & \\ u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right] = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9} \cdot x^3 + C.$$

Приклад 5.

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x dx =$$

$$= \int \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right) \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array}\right] = \int \left(1 - 2t^2 + t^4\right) dt =$$

$$= \int dt - 2\int t^2 dt + \int t^4 dt = t - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Приклад 6.

$$\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{\left(x^2 + 4\right)\left(x - 2\right)} dx = \otimes$$

Підінтегральний раціональний дріб є правильним і розкладається на елементарні дроби виду:

$$\frac{3x^2 - 7x + 10}{\left(x^2 + 4\right)\left(x - 2\right)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 2}$$

$$3x^2 - 7x + 10 = \left(Ax + B\right)\left(x - 2\right) + C\left(x^2 + 4\right)$$

$$3x^2 - 7x + 10 = Ax\left(x - 2\right) + B\left(x - 2\right) + Cx^2 + 4C$$

$$3x^2 - 7x + 10 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 + 4C$$

$$3x^2 - 7x + 10 = x^2\left(A + C\right) + x\left(B - 2A\right) + \left(4C - 2B\right)$$

$$x^2 : \quad 3 = A + C$$

$$x^1 : \; -7 = B - 2A$$

$$x^0 : \; 10 = 4C - 2B$$

$$C = 1$$

$$A = 2$$

$$B = -3$$

$$\otimes = \int\left(\frac{2x-3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}\right)dx = 2\int\frac{x}{x^2-4}\,dx - 3\int\frac{dx}{x^2-4}+\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= \ln\left(x^2+4\right)-\frac{3}{2}\,arctg\,\frac{x}{2}+\ln\left|x-2\right|+C.$$

Розділ 4. Визначений інтеграл

4.1. *Формула Ньютона-Лейбніца.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

ПРИМІТКА. Всі способи, формули для обчислення визначеного інтеграла залишаються такі ж, як і для невизначеного інтеграла.

4.2. *Застосування визначеного інтеграла.*

1. *Площа простої фігури.*

Площа криволінійної трапеції, обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, двома паралельними прямими $x = a,\ x = b$ і відрізком осі Ox $(a \le x \le b)$ дорівнює:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо площа $\boldsymbol{S}$ обмежена двома неперервними кривими $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$, то
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

2. *Об'єм тіла обертання.*

Об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$, віссю Ox, прямими $x = a,\ x = b$ навколо осей Ox і Oy обчислюється за формулами:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xydx.$$

Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t & t_н = \sqrt{4} = 2 \\ x = t^2 & t_в = \sqrt{9} = 3 \\ dx = 2tdt & \end{bmatrix} = \int_2^3 \frac{t-1}{t+1} \cdot 2tdt = \left(t^2 - 4t + 4\ln|t|\right)\Big|_2^3 =$$
$$= (9 - 12 + 4\ln 4) - (4 - 8 + 4\ln 3) = 2{,}15.$$

Приклад 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену лініями:

$$y = \sin x + 2, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = \pi.$$

Розв'язування.

$$S = \int_0^{\pi} (\sin x + 2 + 1) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + 3\int_0^{\pi} dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + 3x\Big|_0^{\pi} = -(-1-1) + 3\pi = 2 + 3\pi.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ $(0 \le x \le 2)$.:

Розв'язування. $V = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 (4x - x^2) dx = \pi\left(4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}\pi.$

Література:

1. Акіньшин В.Д., Касярум С.О., Григоренко К.В., Частоколенко І.П. «Вища математика. Частина 1» – Черкаси, 2016 р.
2. Акіньшин В.Д., Касярум С.О., Григоренко К.В., Частоколенко І.П. «Вища математика. Частина 2» – Черкаси, 2016 р., 218с.
3. Григоренко К.В., Касярум С.О., Частоколенко І.П. «Вища математика». Навч. пос., Черкаси, – 2017, 90 с.
4. Данко Н.Е. и др. «Высшая математика в упражнениях и задачах».

Завдання для виконання роботи.

1. ***За координатами вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ знайти:***
   1) ***довжину ребер A_1A_2 і A_1A_3;***
   2) ***кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_3;***
   3) ***площу грані $A_1A_2A_3$;***
   4) ***об'єм піраміди;***
   5) ***рівняння прямих A_1A_2 і A_1A_3;***
   6) ***рівняння площин $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$;***
   7) ***кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_2A_4$.***

Номер задачі	Координати точки A_1	Координати точки A_2	Координати точки A_3	Координати точки A_4
1.1	(0, 2, 3)	(6, 5, 5)	(2, –4, 6)	(–3, 4, 9)
1.2	(2, –1, 2)	(8, 2, 4)	(4, –7, 5)	(–1, 1, 8)
1.3	(2, 0, –1)	(8, 3, 1)	(4, –6, 2)	(–1, 2, 5)
1.4	(1, 1, 1)	(7, 4, 3)	(3, –5, 4)	(–2, 3, 7)
1.5	(–2, 2, 1)	(4, 5, 3)	(0, –4, 4)	(–5, 4, 7)
1.6	(4, 0, 3)	(8, 3, 5)	(4, –6, 6)	(–1, 2, 9)
1.7	(–1, 1, 0)	(5, 4, 2)	(1, –5, 3)	(–4, 3, 6)
1.8	(3, 2, 1)	(9, 5, 3)	(5, –4, 4)	(0, 4, 7)
1.9	(0, 7, 1)	(4, 1, 5)	(4, 6, 3)	(3, 9, 8)
1.10	(5, 5, 4)	(3, 8, 4)	(3, 5, 10)	(5, 8, 2)

2. ***Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:***

   а) методом Крамера;

   б) матричним способом.

2.1. $\begin{cases} 4x+2y+3z=3 \\ 5x+y+z=4 \\ x+3y-2z=-7 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 5x+2y-z=2 \\ 13x+5y+2z=18 \\ x-3y=0 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 6x+3y-5z=0 \\ 9x+4y-7z=3 \\ 14x+6y-11z=6 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 5x-9y-14z=6 \\ x+7y+5z=11 \\ 5x-21y-27z=-5 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x+y-3z=-1 \\ 8x+3y-6z=-1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 2x+3y+4z=15 \\ x+y+5z=16 \\ 3x-2y+z=1 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 5x+2y-z=2 \\ 13x+5y+2z=18 \\ x-3y=0 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 7y-2z=-8 \\ 5x-6y+4z=20 \\ 6x+4y+3z=7 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 7y-2z=-8 \\ 5x-6y+4z=20 \\ 6x+4y+3z=7 \end{cases}$

3. Обчислити границі функцій, не користуючись методами диференціального числення.

3.1. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^x-1}{arctgx}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+11}{7x^3-5x^2+x}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

3.2. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$ 4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{\frac{-4}{x+3}}$

3.3. 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{tg\pi x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+5x}-10$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ 4) $\lim\limits_{x\to\pi}(1-\sin 3x)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$

3.4. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$

3.5. 1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+2}-1}{\ln(x+2)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$ 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(9-x^3\right)^{\frac{4}{x-2}}$

3.6. 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(tgx+x)$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2 2x\right)^{\frac{1}{-\cos 4x}}$

3.7. 1) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{2x^2+3x+1}{6x^2+x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+8}{3x^2+6x-15}$

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+7x+2}{3x^2-2x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3-2x^2\right)^{\frac{1}{2(1-x)}}$

3.8. 1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 3x}{ctgx}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-4}{4x^2+3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{3(3-x)}}$

3.9. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\cos(x-3)+2x}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+9x^2+2x}{3x^3-8x+4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2+x-1}{6x^2-x-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$

3.10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$ 4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{-1}{2(x+4)}}$

4. Знайти похідні першого порядку, використовуючи правила обчислення похідних:

4.1. 1) $y=\dfrac{7}{x^3}+\sin 3x$ 2) $y=x\cdot\arccos\dfrac{x}{2}$

3) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 4) $\begin{cases} x=arctg(1+t)^2 \\ y=\sqrt{t^2+2t+2}\end{cases}$

4.2. 1) $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-2\cos 4x$ 2) $y=x^2\sin x++2x\cos x$

3) $y=arctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ 4) $\begin{cases} x=tg\left(t^2\right) \\ y=t^2-5 \end{cases}$

4.3. 1) $y=7\sqrt[4]{x}-2\ln 2x$ 2) $y=\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x}$

3) $y=\frac{\arccos x}{x}$ 4) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1)^2 \end{cases}$

4.4. 1) $y=2x^3-5\sqrt{x}+tg2x$ 2) $y=x^2e^{2x}$

3) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$ 4) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=\left(2+e^{-t}\right)^3 \end{cases}$

4.5. 1) $y=3\sqrt{x}+2\ln 4x-4e^{2x}$ 2) $y=x\cdot\arcsin 3x$

3) $y=\frac{2\cos x-\sin x}{\sin 2x+4x}$ 4) $\begin{cases} x=\frac{3}{1+t^2} \\ y=arctgt \end{cases}$

4.6. 1) $y=3e^{2x}+\sqrt{2x}$ 2) $y=arctg\,2x\cdot\ln 2x$

3) $y=\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$ 4) $\begin{cases} x=7+t^2 \\ y=ctg\left(3t^2\right) \end{cases}$

4.7. 1) $y=\sin 3x+\cos^2 x-4$ 2) $y=\cos 2x\cdot\sin 3x$

3) $y=\frac{\ln 2x}{tg3x}$ 4) $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=\frac{1}{1-4t^2} \end{cases}$

4.8. 1) $y=e^{3x}+\sqrt[3]{2x}+x^2$ 2) $y=\ln 3x\cdot 2^x$

3) $y=\frac{\arcsin 2x}{\arccos 3x}$ 4) $\begin{cases} x=(t-1)^2 \\ y=\sin(t-1)^2 \end{cases}$

4.9. 1) $y=\ln^2 x+2\sqrt{\cos x}$ 2) $y=3\ln 4x\cdot e^{\sqrt{x}}$

3) $y=\frac{\sin 4x}{\cos 8x}$ 4) $\begin{cases} x=\ln\left(1-t^4\right) \\ y=\arccos\left(t^2\right) \end{cases}$

4.10. 1) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+7arctgx$ 2) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\sin 4x$

3) $y=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 4) $\begin{cases} x=\sin^2(1-4t) \\ y=\cos^2(1-4t) \end{cases}$

5. *Обчислити невизначені інтеграли.*

5.1. 1) $\int\dfrac{5x^2dx}{5-2x^3}$ 2) $\int\dfrac{dx}{2+tgx}$

3) $\int x\cos 5xdx$

5.2. 1) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^3-4}}$ 2) $\int\dfrac{dx}{1-\sin^2 x}$

3) $\int\dfrac{\ln(2x+1)}{x^3}dx$

5.3. 1) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$ 2) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x\cdot tg^2 x}$

3) $\int xe^{3x-5}dx$

5.4. 1) $\int\sqrt{1-2x^3}\,x^2dx$ 2) $\int\sin 3x\cos 5xdx$

3) $\int(x+1)\cos 2xdx$

5.5. 1) $\int\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ 2) $\int\sin^5 2xdx$

3) $\int\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$

5.6. 1) $\int\dfrac{\sqrt{2+tgx}}{\cos^2 x}dx$ 2) $\int\dfrac{dx}{4+2\sin x}$

3) $\int x\cos 5xdx$

5.7. 1) $\int\dfrac{dx}{\sin^2(3-2x)}$ 2) $\int\dfrac{2-\sin x}{2+2\cos x}dx$

3) $\int x\ln(x-1)dx$

5.8. 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$ 2) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$

3) $\int (2x+1) arctgx dx$

5.9. 1) $\int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x} dx$ 2) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$

3) $\int arctg\sqrt{2x-1} dx$

5.10. 1) $\int e^{3-5x} dx$ 2) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx$

3) $\int \arcsin x dx$

6. Обчислити визначені інтеграли.

6.1. $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1} dx$ 6.2. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

6.3. $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos\ln x dx$ 6.4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$

6.5. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$ 6.6. $\int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx$

6.7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$ 6.8. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$

6.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ 6.10. $\int_{-1}^1 xarctgx dx$

7. Обчислити площу плоскої фігури, обмежену кривими. Зробити схематичний рисунок області.

7.1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \quad x=0, \qquad y=0, \qquad (x\geq 0, \quad y\geq 0).$

7.2. $y^2=4x, \qquad x^2=4y.$

7.3. $4y=x^2, \qquad y=2.$

7.4. $x^2+y^2\leq 9, \quad y=0 \;\; (y\geq 0).$

7.5. $x^2+4y-16=0, \qquad y=0.$

7.6. $y^2=-x+9, \quad x=0.$

7.7. $y=x^2, \qquad y=2-x^2.$

7.8. $x^2+y^2+2x=0, \qquad y=0 \;\; (y\geq 0).$

7.9. $y=\ln x, \qquad y=0, \qquad x=e.$

7.10. $y=-\sqrt{4-x^2}, \qquad y=0 \;\; (y\leq 0).$